PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

December, 2008

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Obtain the characteristic equation and eigenvalues of

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) If λ_1 and λ_2 are two distinct eigenvalues of a matrix M, show that the corresponding eigenvectors $\vec{\mathbf{x}}_1$ and $\vec{\mathbf{x}}_2$ are linearly independent.

(c) Show that the element i in the group $\{1, i, -1, -i\}$ is a class by itself with multiplication as the binary law of composition.

(d) Locate and name the singularities in the finite z-plane of $f(z) = \dfrac{ln(z + i)}{z^3}$.

(e) Show that the set of all real numbers of the form $a + \sqrt{2}\,b$, where a and b are rational numbers, form a group under binary operation of multiplication.

(f) Obtain the Laplace transform of the function $e^t \cos 2t$.

(g) Determine the domain over which the function $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 4}$ is analytic.

(h) Determine the Fourier transform of the function

$$f(x) = \begin{cases} c & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

where c is a constant.

2. (a) Prove that the eigenvalues of a Hermitian matrix are real. 3

(b) Diagonalize the following matrix : 5

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) Show that the acceleration is a contravariant tensor of rank 2. 2

3. Attempt any **two** parts : $2 \times 5 = 10$

(a) Find the residues of the following functions :

(i) $f(z) = \dfrac{z e^z}{(z-a)^3}$ at the pole $z = a$

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + a^2)^2}$ at $z = ia$

(b) Using contour integration, evaluate the integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4}$$

(c) Evaluate the integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \sin \theta}$$

4. Using the method of Fourier transforms, solve the equation $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$ given that $f(x, 0) = C\,\delta(x)$, where C is a constant and $\delta(x)$ is the delta function. 10

OR

(a) Obtain the inverse Laplace transform of

$$\frac{3s + 2}{s^2 + 5s + 6}$$ 5

(b) Solve the following differential equation using Laplace transform method : 5

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 7$$

5. Attempt any ***two*** parts : $2\times5=10$

(a) Show that $P_n(x)$ and $P_n'(x)$ are orthogonal on $(-1, 1)$.

(b) The generating function for Bessel function is given by

$$g(x, t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\,t^n$$

Show that :

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} \cdot J_n(x)$$

(c) The Laguerre's equation of degree n is given by

$$x L_n'' + (1 - x) L_n' + n L_n = 0.$$

Show that if $n \neq k$

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x)\, dx = 0$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2008

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *सभी प्रश्न करें । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग करें : *5×2=10*

(क) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

के लिए अभिलक्षणिक समीकरण और आइगेनमान प्राप्त करें ।

(ख) यदि λ_1 और λ_2 आव्यूह M के दो भिन्न आइगेनमान हों, तो सिद्ध करें कि उनके संगत आइगेनसदिश $\vec{\mathbf{x}}_1$ और $\vec{\mathbf{x}}_2$ रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं ।

(ग) सिद्ध करें कि गुणन के द्वयी संयोजन नियम के अधीन समूह $\{1, i, -1, -i\}$ में अवयव i स्वयं एक वर्ग है ।

(घ) परिमित z-समतल में निम्न फलन की विचित्रताएँ निर्धारित कीजिए और उनके नाम बताइए :

$$f(z) = \frac{\ln(z + i)}{z^3}$$

(ङ) सिद्ध करें कि $a + \sqrt{2}\,b$, जहाँ a और b परिमेय संख्याएँ हैं, रूप की सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, गुणन के द्वयी संयोजन नियम के अधीन एक समूह होता है ।

(च) फलन $e^t \cos 2t$ का लाप्लास रूपांतर प्राप्त करें ।

(छ) वह प्रांत ज्ञात कीजिए जिस पर फलन

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 4}$$ विश्लेषिक है ।

(ज) निम्न फलन का फूरिए रूपांतर ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} c & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

जहाँ c एक अचर है ।

2. (क) सिद्ध करें कि हर्मिटी आव्यूह के आइगेनमान वास्तविक होते हैं। 3

(ख) निम्न आव्यूह का विकर्णन कीजिए : 5

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि त्वरण कोटि 2 वाला प्रतिपरिवर्ती टेन्सर है। 2

3. कोई *दो* भाग करें : $2 \times 5 = 10$

(क) निम्नलिखित फलनों के अवशिष्ट प्राप्त करें :

(i) $f(z) = \dfrac{z e^z}{(z-a)^3}$ का अनंतक $z = a$ पर

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + a^2)^2}$, $z = ia$ पर

(ख) कंटूर समाकलन का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समाकल का मान प्राप्त करें :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4}$$

(ग) निम्न समाकल का मान प्राप्त करें :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\sin\theta}$$

4. फूरिए रूपांतरण विधि का प्रयोग करते हुए निम्न समीकरण को हल करें :

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$$

दिया गया है कि $f(x, 0) = C\,\delta(x)$, जहाँ C नियतांक है और $\delta(x)$ डेल्टा फलन है । 10

अथवा

(क) निम्न का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त करें : 5

$$\frac{3s + 2}{s^2 + 5s + 6}$$

(ख) लाप्लास रूपांतर विधि से निम्न अवकल समीकरण हल करें : 5

$$y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 7$$

5. कोई *दो* भाग करें : $2\times5=10$

(क) सिद्ध करें कि $P_n(x)$ और $P_n'(x)$, $(-1, 1)$ पर लांबिक हैं ।

(ख) बेसल फलन के लिए जनक फलन दिया गया है :

$$g(x, t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)t^n$$

सिद्ध करें कि :

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} \cdot J_n(x)$$

(ग) n घात वाला लागेर समीकरण है

$$x L_n'' + (1 - x) L_n' + n L_n = 0.$$

सिद्ध करें कि $n \neq k$ के लिए

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_k(x)\, dx = 0$$