BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2007

MATHEMATICS

MTE-9 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **five** questions in all. Question number 1 is **compulsory**. Do any **four** questions out of questions no. 2 to 7. No calculators are allowed.*

---

1. Are the following statements *true* or *false* ? Give reasons for your answers. *10*

(i) The set of natural numbers is a closed set.

(ii) The function f, where $f(x) = [x]$, is integrable on $[0, 4]$.

(iii) The equation $x^3 - 2x + 3 = 0$ has a real root between -2 and 1.

(iv) The sequence $< a_n >$, where $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$, is not monotonic.

(v) The function f, defined on $\mathbf{R}$ by $f(x) = |x + 5|$, has a local minimum at $x = -5$.

2. (a) Test the following series for convergence : 4

$$1 + \frac{2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^3}{4!} + \ldots\ldots$$

(b) Check whether the function f, defined by $f(x) = \frac{2x + 3}{3x + 4}$ over $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{-4}{3}\right\}$, possesses an extreme value. 2

(c) Draw the graph of the function f, defined by $f(x) = |x + 2| + [x], \ x \in [-3, -1]$. 4

3. (a) Evaluate $\int_1^2 (3x + 2)\, dx$ by taking a partition of [1, 2] which divides it into n equal sub-intervals. 5

(b) Prove that

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) \text{ if } x > 0.$$ 3

(c) Check whether every open interval is an open set or not. 2

4. (a) Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$$

is uniformly convergent for all real values of x. 5

(b) A function f is defined on **R** by

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{e^{-1/x} - e^{1/x}}{e^{-1/x} + e^{1/x}}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Check whether f is derivable at $x = 0$. 3

(c) Write the inequality

$$-5 \leq x - \frac{3}{2} \leq 1$$

in the modulus form. 2

5. (a) Check whether the set of whole numbers and the set of natural numbers are equivalent or not. 2

(b) Find the limit, when $n \to \infty$, of the sum

$$\frac{n^2}{(3n+1)^3} + \frac{n^2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2}{(3n+3)^3} + \ldots + \frac{n^2}{(6n)^3}$$ 3

(c) Check whether the functions f, defined as given below, are uniformly continuous or not : 5

(i) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [2, 3]$

(ii) $f(x) = x^3, \quad x \in \mathbf{R}$

6. (a) Let f be defined on **R** by $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ if $x \neq 0$, and $f(0) = 0$. Show that f' is continuous on **R** but it is not derivable at $x = 0$. 5

(b) By applying the Cauchy General Principle of convergence, show that the sequence $< a_n >$, given by $a_n = \frac{1}{n^2}$, is convergent. 3

(c) Let $f : X \to Y$ be a strictly increasing function such that $f(X) = Y$. Show that f^{-1} exists and it is also strictly increasing. 2

7. (a) Test the following series for convergence : 4

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 3}{2n + 1}\right)^n$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n+1)!}$$

(b) Let g be an integrable function defined on [a, b], and let

$$h(x) = \int_a^x g(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

Show that h is uniformly continuous on [a, b]. 4

(c) Is every convergent series also absolutely convergent ? Justify your conclusion. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
सत्रांत परीक्षा
जून, 2007
गणित
एम.टी.ई.-9 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्न कीजिए । प्रश्न संख्या 1 करना* ***ज़रूरी*** *है । प्रश्न संख्या 2 से 7 में से कोई* ***चार*** *प्रश्न कीजिए । कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

1. बताइए निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तरों के कारण बताइए । *10*

(i) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय संवृत्त समुच्चय होता है ।

(ii) $f(x) = [x]$ द्वारा परिभाषित फलन f, $[0, 4]$ पर समाकलनीय है ।

(iii) समीकरण $x^3 - 2x + 3 = 0$ का -2 और 1 के बीच एक वास्तविक मूल होता है ।

(iv) $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $< a_n >$ एकदिष्ट नहीं है ।

(v) $f(x) = |x + 5|$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f का $x = -5$ पर स्थानिक निम्निष्ठ होता है ।

2. (क) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : 4

$$1 + \frac{2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^3}{4!} + ...$$

(ख) जाँच कीजिए कि $\mathbf{R} \setminus \left\{\frac{-4}{3}\right\}$ पर $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x + 4}$ द्वारा परिभाषित फलन f का चरम मान है या नहीं । 2

(ग) $f(x) = |x + 2| + [x], \; x \in [-3, -1]$ द्वारा परिभाषित फलन f का आलेख बनाइए । 4

3. (क) [1, 2] को n बराबर उप-अन्तरालों में विभाजन करके $\int_1^2 (3x + 2)\, dx$ का मूल्यांकन कीजिए । 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि $x - \frac{x^2}{2} < \ln (1 + x)$ यदि $x > 0$. 3

(ग) जाँच कीजिए कि प्रत्येक विवृत्त अन्तराल विवृत्त समुच्चय होता है या नहीं । 2

4. (क) जाँच कीजिए कि श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$$

x के सभी वास्तविक मानों के लिए एकसमानतः अभिसारी है । 5

(ख) फलन

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \dfrac{e^{-1/x} - e^{1/x}}{e^{-1/x} + e^{1/x}}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

के रूप में **R** पर परिभाषित है ।

जाँच कीजिए कि f, $x = 0$ पर अवकलनीय है या नहीं । 3

(ग) असमिका $-5 \leq x - \frac{3}{2} \leq 1$ को मापांक रूप में लिखिए । 2

5\. (क) जाँच कीजिए कि पूर्ण संख्याओं का समुच्चय और प्राकृत संख्याओं का समुच्चय तुल्य हैं या नहीं । 2

(ख) निम्नलिखित की सीमा ज्ञात कीजिए जब कि n अनंत की ओर प्रवृत्त होता है :

$$\frac{n^2}{(3n+1)^3} + \frac{n^2}{(3n+2)^3} + \frac{n^2}{(3n+3)^3} + \dots + \frac{n^2}{(6n)^3}$$ 3

(ग) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित द्वारा परिभाषित फलन f एकसमानतः संतत हैं या नहीं : 5

(i) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [2, 3]$

(ii) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$

6\. (क) मान लीजिए f, $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ यदि $x \neq 0$, और $f(0) = 0$ के रूप में **R** पर परिभाषित है । दिखाइए कि f′, **R**, पर संतत है लेकिन यह $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है । 5

(ख) कौशी का व्यापक अभिसरण नियम लागू करके दिखाइए कि $a_n = \frac{1}{n^2}$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $< a_n >$ अभिसारी है । 3

(ग) मान लीजिए $f : X \to Y$ एक ऐसा निरंतर वर्धमान फलन है जिसके लिए $f(X) = Y$. दिखाइए कि f^{-1} का अस्तित्व है और यह भी निरंतर वर्धमान है । 2

7. (क) अभिसरण के लिए निम्नलिखित श्रेणियों की जाँच कीजिए : 4

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^n$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n+1)!}$$

(ख) मान लीजिए g, [a, b] पर परिभाषित समाकलनीय फलन है और मान लीजिए

$$h(x) = \int_a^x g(t)\, dt, \quad x \in [a, b].$$

दिखाइए कि h, [a, b] पर एकसमानतः संतत है । 4

(ग) क्या प्रत्येक अभिसारी श्रेणी निरपेक्षतः अभिसारी भी होती है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 2